Übungsstunde 5:

Themen:

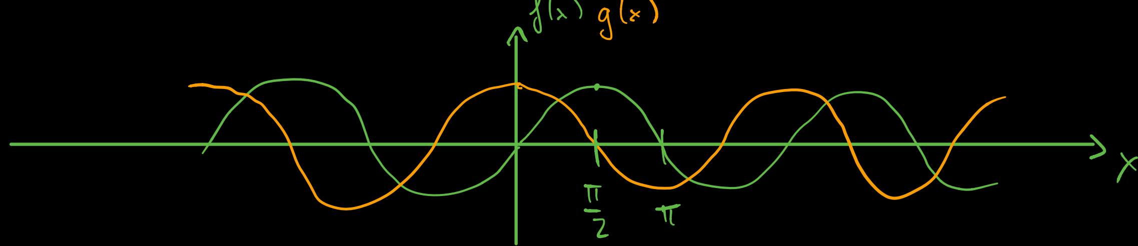
- Basis in Vektorräumen
- Basen von linearen Abbildungen (Kern & Bild)
- Allgemeine Lösung eines LGS $\Leftrightarrow$ Link zu DGL

Lineare Unabhängigkeit in Funktionsräumen:

Frage: $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \cos(x)$

$$a \cdot f(x) + b \cdot g(x) = 0$$

$$\boxed{a \cdot \sin(x) + b \cdot \cos(x) = 0} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



$x = \frac{\pi}{2}$: $a \cdot 1 = 0$

$x = \pi$: $b \cdot (-1) = 0$

$\Big\}$ Nur die triviale Lösung $\Rightarrow$ lin. unabh. ✓

Frage: $f(x) = \sin(x+2)$, $g(x) = \sin(x)$, $h(x) = \cos(x)$

$$\sin(x+2) = \sin(x)\underbrace{\cos(2)}_{a} + \underbrace{\sin(2)}_{b}\cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ lin. abhängig von $\sin(x), \cos(x)$ ✓

Frage: $\mathcal{B} = \{ b^{(1)} = 1,\ b^{(2)} = x,\ b^{(3)} = 3x^2 - 1 \}$ eine Basis vom $\mathcal{P}_2$?

$$1 = 1 \cdot b^{(1)} + 0 \cdot b^{(2)} + 0 \cdot b^{(3)} = 1$$

$$x = 0 \cdot b^{(1)} + 1 \cdot b^{(2)} + 0 \cdot b^{(3)} = x$$

$$x^2 = \frac{1}{3} \cdot b^{(1)} + 0 \cdot b^{(2)} + \frac{1}{3} \cdot b^{(3)} = \frac{1}{3}(3x^2 - 1) + \frac{1}{3} = x^2$$

$$S = \{ e^{(1)} = 1 , e^{(2)} = x , e^{(3)} = x^2 \}$$

$$1 = \underline{1} \cdot e^{(1)} + \underline{0} \cdot e^{(2)} + \underline{0} \cdot e^{(3)} \Rightarrow b^{(1)} \mathrel{\hat=} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_S$$

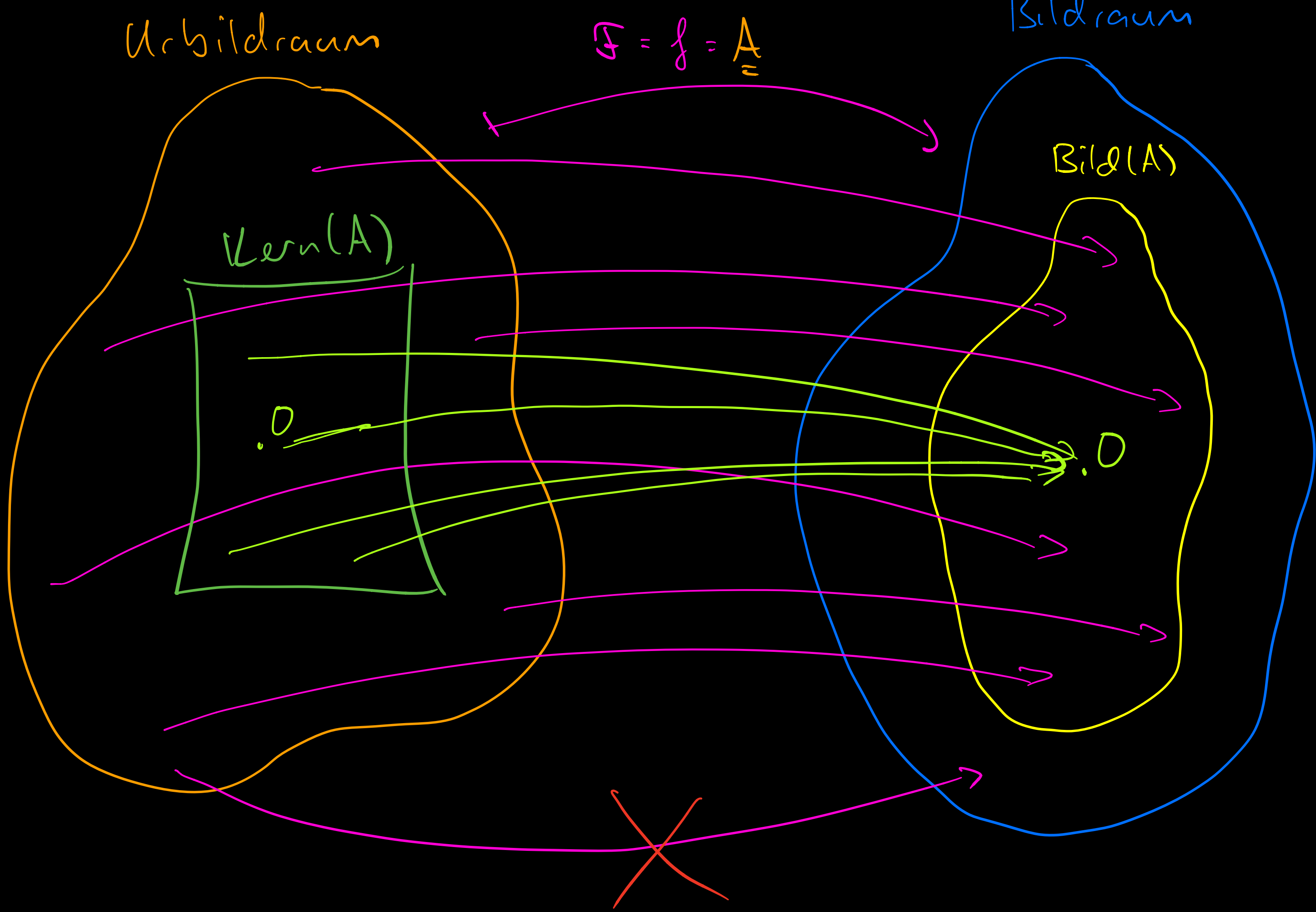
$$x = \underline{0} \cdot e^{(1)} + \underline{1} \cdot e^{(2)} + \underline{0} \cdot e^{(3)} \Rightarrow b^{(2)} \mathrel{\hat=} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_S$$

$$3x^2 - 1 = \underline{-1} \cdot e^{(1)} + \underline{0} \cdot e^{(2)} + \underline{3} \cdot e^{(3)} \Rightarrow b^{(3)} \mathrel{\hat=} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}_S$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 0 \end{array}\right] \rightarrow \text{Rang } 3 \Rightarrow b^{(1)}, b^{(2)} \,\&\, b^{(3)} \text{ sind lin. unabh.}$$

$\Rightarrow$ bilden Basis von $\mathcal{P}_2$

Kern & Bild linearer Abbildungen:



Eigenschaften von Kern & Bild:

Sei A eine $m \times n$ - Matrix : $A = \begin{array}{c c} & n \\ m & \begin{bmatrix} | & | & | & & | \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ | & | & | & & | \end{bmatrix} \end{array}$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = x_1 \begin{bmatrix} | \\ a_1 \\ | \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} | \\ a_2 \\ | \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} | \\ a_n \\ | \end{bmatrix} = \underline{b}$$

i) $\underline{b} \in \mathrm{Im}(A) \Leftrightarrow \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ ist lösbar

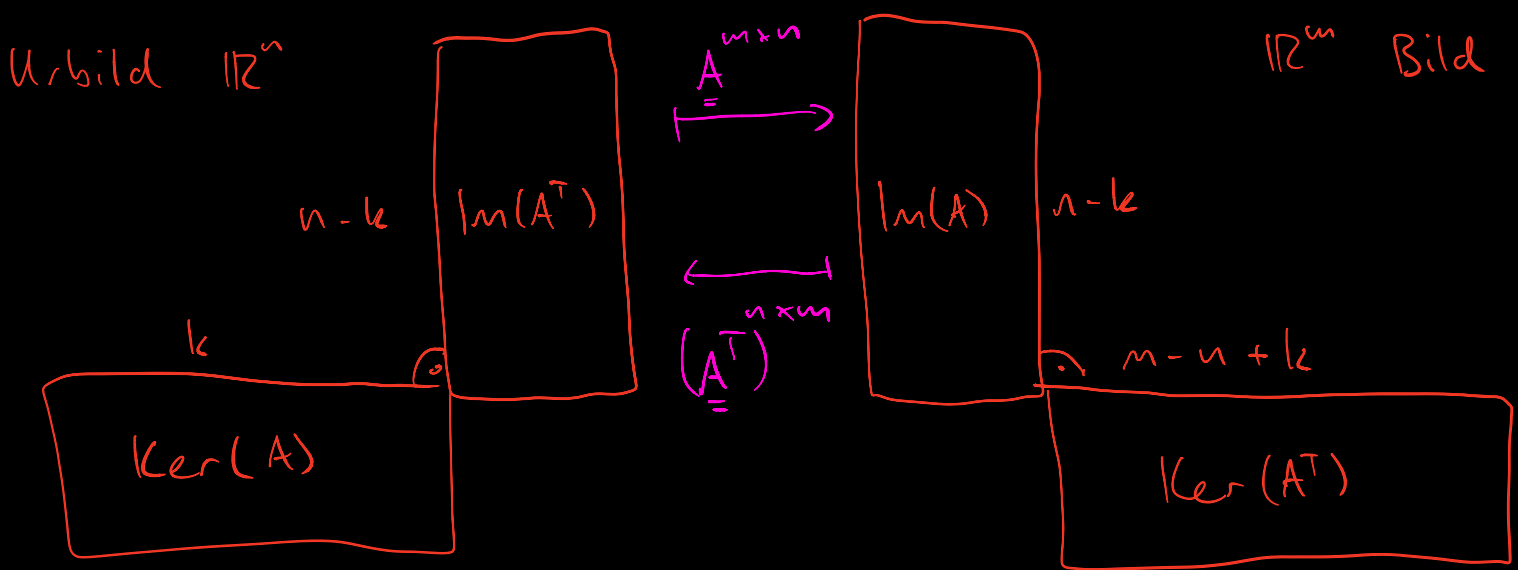
ii) $x \in \mathrm{Ker}(A) \Leftrightarrow x$ eine Lösung zum HLGS $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{0}$

iii) $\mathrm{Ker}(A)$ ist ein UVR vom $\mathbb{R}^n$

iv) $\mathrm{Im}(A)$ ist ein UVR vom $\mathbb{R}^m$

v) $\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A)) = n$

vi) $\dim(\mathrm{Im}(A)) = \dim(\mathrm{Im}(A^T)) = \underline{\underline{r}}$



"Fundamentalsatz der Linearen Algebra"

$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ Bild(A) $\Leftrightarrow$ Spaltenraum von A

$\underline{b} \perp (A^T x = 0)$ $\mathrm{Ker}(A^T)$

Beispiel 5.1: $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto x_1 - x_2$

Bestimme Kern & Bild von F.

Bestimme Kern & Bild von $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$

Kern: Lösungsmenge von $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = 0$

$$\Leftrightarrow \text{Kern}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1 = x_2 \right\}$$

Oder rigoroser: $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$

$x_2 = t \in \mathbb{R}$
$x_1 = t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \text{Kern}(A) = \left\{ t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \underline{\underline{\text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}}$$

Bild: $\text{Im}(F) = \underline{\underline{\mathbb{R}}}$

Beispiel 5.2: $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Bestimme Kern & Bild von $\underline{\underline{A}}$:

Kern: $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = 0$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{III}-\text{I}]{\text{II}+2\text{I}} \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_4 = t \in \mathbb{R}$
$x_3 = s \in \mathbb{R}$
$x_2 = \frac{1}{2}(3t - 3s)$
$x_1 = \frac{1}{2}(-x_2 - x_3)$
$= \frac{1}{4}(s - 3t)$

$$\Rightarrow \text{Kern}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(s-3t) \\ \frac{1}{2}(3t-3s) \\ s \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{1}{4} s \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} t \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

Bild: $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

Allgemeine Lösung eines LGS / einer DGL:

$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b} \iff \underline{x}^p$ partikuläre Lösung

$\underline{x} = \underline{x}^p + \alpha\,\underline{x}^{h_1} + b\,\underline{x}^{h_2}$ allgemeine Lösung, $\alpha, b \in \mathbb{R}$

homogene Lösungen $\iff$ Basis $\mathrm{Ker}(A)$, $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{span}\{\underline{x}^{h_1}, \underline{x}^{h_2}\}$

$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = 0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{\underline{A}}\left(\underline{x}^p + \alpha\,\underline{x}^{h_1} + \beta\,\underline{x}^{h_2}\right) = \underbrace{\underline{\underline{A}}\,\underline{x}^p}_{\underline{b}} + \alpha\underbrace{\underline{\underline{A}}\,\underline{x}^{h_1}}_{0} + \beta\underbrace{\underline{\underline{A}}\,\underline{x}^{h_2}}_{0}$$

Urbild:

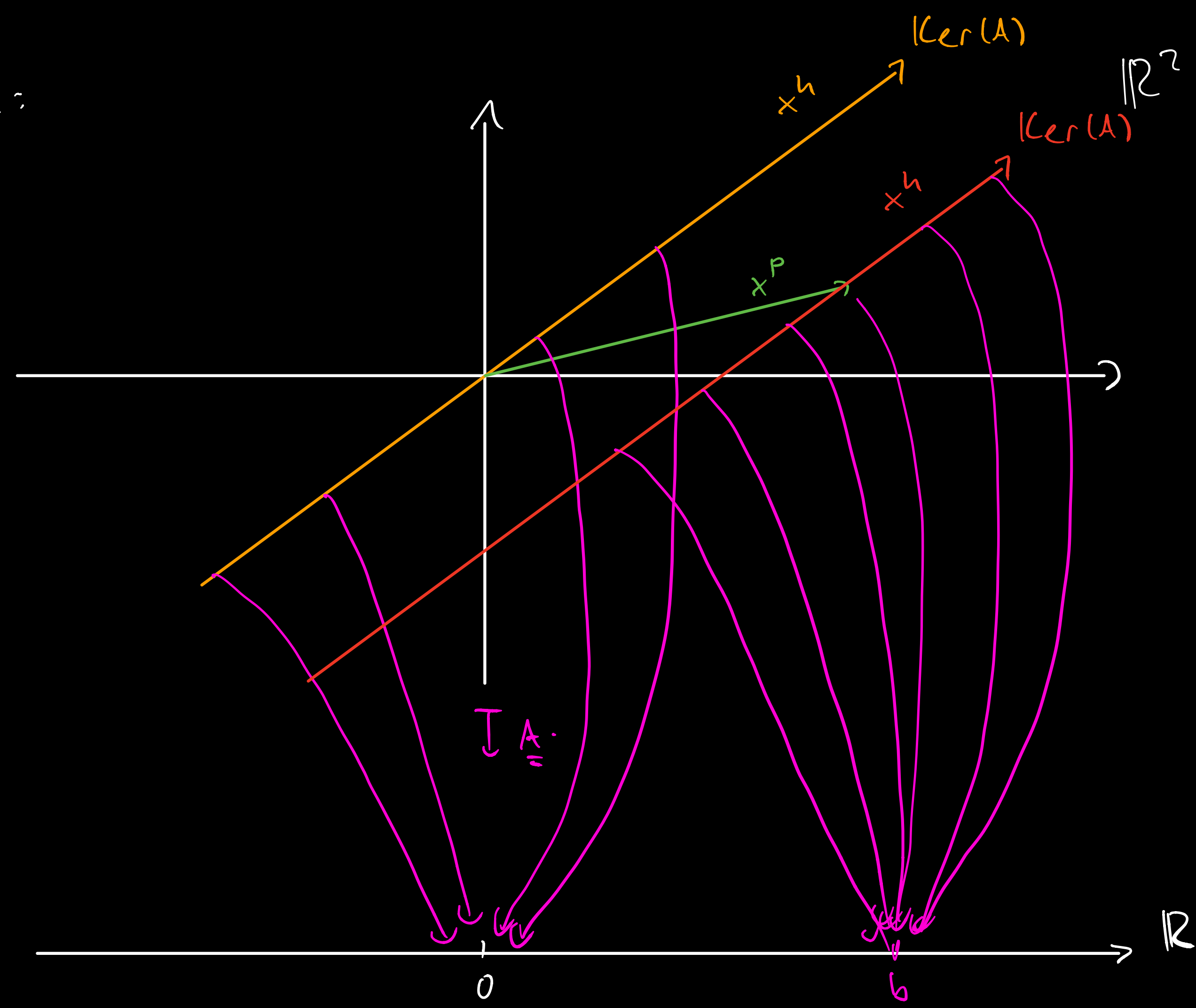


Bild: